Factorizaciones

Pedro A. García Sánchez

Sea $S = \langle 2, 3\rangle$. El entero 6 está en S, y $6 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2$. Tanto 2 como 3 son irreducibles en S en el sentido de que no se pueden obtener como combinación de otros elementos de S. Por tanto, 6 admite dos factorizaciones o expresiones esencialmente distintas en S como combinación de irreducibles. Nótese además que 2 "divide" a 6 en S, ya que $2+4=6$ y $4 \in S$. Como $6 = 3+3$ y 2 no divide a 3, pues $1 \notin S$, tenemos que 2 es un irreducible que no es "primo". Lo mismo le ocurre al 3. En general, en un semigrupo numérico, sus generadores minimales son sus elementos irreducibles, y ninguno de ellos es primo. Es más en un semigrupo numérico (salvo $\mathbb{N}$) siempre hay elementos con más de una factorización. Esto se debe a que el concepto de factorización está íntimamente ligado al de presentación, y en cuanto que tengamos relatores definiendo el semigrupo, tendremos factorizaciones distintas para un mismo elemento.

Factorizaciones

Dado un semigrupo numérico S generado minimalmente por $\{n_1, \dots, n_k\}$, definimos como hicimos anteriormente

$$\varphi : \mathbb{N}^k \to S,\ \varphi(a_1, \dots, a_k) = a_1 n_1 + \dots + a_k n_k,$$

y que usamos para hablar de presentaciones para S. La gente que estudia factorizaciones le suele llamar *homomorfismo de factorización* de S. Dado $n \in S$, se define el conjunto de factorizaciones de n como $\mathsf{Z}n) = \varphi^{-1}(n)$. Así en el ejemplo anterior las factorizaciones de 6 son $\mathsf{Z}(s) = \{(3,0),(0,2)\}$. Esto es, nos quedamos con los exponentes de los irreducibles que aparecen en las factorizaciones. Los conjuntos de factorizaciones de un elemento n en S se corresponden con las soluciones no negativas de $n_1 x_1 + \dots + n_k x_k = n$, y por tanto son siempre finitos.

Invariantes basados en longitud de factorización

La *longitud* de una factorización $a = (a_1, \dots, a_k)$ de n (y por tanto $a_1 n_1 + \cdots + a_k n_k = n$) es $|a| = a_1 + \cdots + a_k$, esto es, el número de irreducibles que ocurren en dicha factorización. Podemos definir el *conjunto de longitudes de factorizaciones* de n como $\{l \mid \text{existe } a \in \mathsf{Z}n), |a| = l\}$. Se sabe gracias a los trabajos de Gerlodinger, Halter-Koch y en general de la escuela de Graz que estos conjuntos tienen una estructura que ellos han llamado multiprogresiones casi aritméticas. Para el semigrupo S se define el conjunto de longitudes como el conjunto de conjuntos de longitudes de sus elementos. Chapman y sus alumnos han probado recientemente el el conjunto de factorizaciones de S no determina de forma unívoca a S.

Si $\{l_1 < \cdots < l_t\}$ es el conjunto de longitudes de factorizaciones de n en S, se define $\Delta(n) = \{l_2 - l_1, l_3 - l_2, \cdots, l_t - l_{t-1}\}$, y $\Delta(S)$ es la unión de todos los conjuntos delta de sus elementos. Chapman y sus alumnos han calculado en varios casos este conjunto, y siguen trabajando en ello.

Si todas las longitudes de un elemento dado de un monoide tienen la misma longitud, entonces se dice que el monoide tiene *longitud media única*. Claramente ningún semigrupo numérico que no sea $\mathbb{N}$ va a tener longitud media única. Basta tomar $n_1 n_k$ que tiene al menos dos factorizaciones, una de longitud n_k y la otra n_1. Una forma de medir cuánto nos alegamos de la unicidad en las longitudes de factorizaciones es mediante la elasticidad de una factorización, concepto que fue introducido por Valenza. Se define para n en S, $\mathrm{L}(n)$ como el máximo (en general es el supremo, pero hemos visto que en nuestro caso el conjunto de factorizaciones es finito) de las longitudes de las factorizaciones de n, y $\mathrm{l}(n)$ como el mínimo. La *elasticidad* de las factorizaciones de n se define como $\rho(n) = \frac{\mathrm{L}(n)}{\mathrm{l}(n)}$. Para el semigrupo S, se define su elasticidad como $\rho(S) = \sup_{n \in S} \rho(n)$. Se demuestra que ese supremo es un máximo y que además es un número racional, que se puede calcular a partir de los soluciones enteras no negativas irreducibles de la ecuación diofántica $n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k = n_1 y_1 + \cdots + n_k y_k$. En este caso $\rho(S) = \frac{n_k}{n_1}$.

Invariantes basados en distancia entre factorizaciones

Dadas dos factorizaciones $a = (a_1, \dots, a_k)$ y $b = (b_1, \dots, b_k)$ de n en el semigrupo numérico $S = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$, definimos el *máximo común divisor* de ambas como $a \wedge b = (\min\{a_1, b_1\}, \dots, \min\{a_k, b_k\})$. La *distancia* entre a y b es $\mathrm{dist}(a, b) = \max\{|a - (a \wedge b)|, |b - (a \wedge b)|\}$ (esta función según ha demostrado Geroldinger cumple las propiedades básicas de una distancia).

Si bien la distancia entre dos factorizaciones de n puede ser muy grande, puede que exista una cadena de factorizaciones de n, de forma que dos factorizaciones consecutivas disten relativamente poco. Decimos que una cadena $z_1, \dots, z_t$ de factorizaciones de n es una *N-cadena* si la distancia entre z_i y z_{i+1} no supera N para todo i. El *grado de catenariedad* de n se define como el mínimo de los N tales que para cualesquiera dos factorizaciones a y b de n existe una

N-cadena $z_1, \dots, z_t$ de forma que $a = z_1$ y $b = z_t$. El grado de catenariedad de S se define como el supremo de los grados de catenariedad de los elementos de S. Se puede probar que ese supremo es de hecho un máximo, y que se alcanza en un elemento de la forma $w + n_i$ con w un elemento del Apéry de la multiplicidad de S en S, y n_i un generador minimal de S. Una vez más, el conjunto de Apéry vuelve a mostrar su sorprendente utilidad.

Existen otros invariantes como el grado de amansamiento, que también pueden ser calculados en función de determinados conjuntos de Apéry.

El paquete `numericalsgps` para `GAP`

Terminaremos esta sesión dando un breve paseo por el paquete `numericalsgps` para `GAP`. En la página oficial del paquete aparece un detallado manual de las funciones implementadas.

En numerical-semigroups.github.io se pueden encontrar ejemplos, cursos y tutoriales relacionados con este paquete y con los semigrupos numéricos en general.